文章编号:1000-4939(2024)02-0411-11

弹性支撑功能梯度压电多孔微圆柱壳的自由振动分析

刘文光[1],庞磊[1],吕志鹏[1],刘超[2],张宇航[1]

(1. 南昌航空大学航空制造工程学院,330063 南昌;2. 哈尔滨工业大学(深圳)理学院,150001 深圳)

摘 要:旨在研究热-力-电载荷下弹性支撑功能梯度压电多孔微圆柱壳的自由振动。首先,建立弹性支撑功能梯度压电多孔微圆柱壳动力学模型;然后,应用三阶剪切变形壳体理论和修正的偶应力理论,推出弹性支撑功能梯度压电多孔微圆柱壳模态频率的解析解;最后,通过数值算例分析了微圆柱壳模态频率的影响因素。结果表明:Pasternak 弹性支撑比 Winkler 弹性支撑更有利于提高微圆柱壳的模态频率;改变弹性支撑的刚度系数、轴向力、外加电压、孔隙分布、材料体积分数指数和结构尺寸可调节微圆柱壳的模态频率;孔隙体积分数越大,温度或轴向力对模态频率的影响越大,而电压对模态频率的影响则越小;不同材料指数下,增大孔隙体积分数对模态频率的影响趋势不同;弹性支撑会减弱温度、轴向力和电压对模态频率的影响,对薄圆柱壳或短圆柱壳模态频率的影响较为显著。

关键词:功能梯度压电材料;弹性支撑;孔隙;修正的偶应力理论;高阶剪切变形理论

中图分类号:O342;TB381 **文献标志码**:A **DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2024.02.015

Free vibration analysis of a functionally graded piezoelectric porous cylindrical microshell resting on elastic foundation

LIU Wenguang[1],PANG Lei[1],LÜ Zhipeng[1],LIU Chao[2],ZHANG Yuhang[1]

(1. School of Aeronautical Manufacturing Engineering,Nanchang Hangkong University,330063 Nanchang,China;
2. School of Science,Harbin Institute of Technology,150001 Shenzhen,China)

Abstract:This article studies the free vibration of a functionally graded piezoelectric porous cylindrical microshell resting on elastic foundation under thermo-electro-mechanical loads. First,the dynamic model of the functionally graded piezoelectric porous cylindrical microshell resting on elastic foundation was established. Then the analytical solution of modal frequencies of the functionally graded piezoelectric porous cylindrical microshell resting on elastic foundation was derived using the third-order shear deformation shell theory and the modified couple stress theory. Last the factors affecting model frequency were discussed by numerical case studies. The results show that the Pasternak foundation is preferred to improve the modal frequencies of the shell to the Winkler foundation. The modal frequencies of the

收稿日期:2021-07-01 **修回日期**:2022-11-04

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 51965042)

通信作者:刘文光,教授。E-mail:liuwg14@nchu.edu.cn

引用格式:刘文光,庞磊,吕志鹏,等. 弹性支撑功能梯度压电多孔微圆柱壳的自由振动分析[J]. 应用力学学报,2024,41(2):411-421.
LIU Wenguang,PANG Lei,LÜ Zhipeng,et al. Free vibration analysis of a functionally graded piezoelectric porous cylindrical microshell resting on elastic foundation[J]. Chinese journal of applied mechanics,2024,41(2):411-421.

cylindrical microshell could be adjusted via changing the stiffness coefficients of the elastic foundation, axial load, applied voltage, porosity distribution, material volume fraction indexes, and structure dimensions. The larger the porosity volume fraction, the greater the influence of temperature and axial load on the modal frequency, and the smaller the influence of applied voltage on the modal frequency. The change trends of modal frequency with increasing porosity volume fraction are obviously different with different material volume fraction indexes. The elastic foundation can weaken the influence of temperature, axial load and applied voltage on the modal frequency, and its influence on the modal frequency of thin or short cylindrical shell is more significant.

Key words: functionally graded piezoelectric material; elastic foundation; porosity; modified couple stress theory; higher-order shear deformation theory

压电材料因为呈脆性,一般与弹性基体结合组成多层结构。然而,多层结构的分界面会导致应力集中,易产生蠕变、裂纹和脱层等各种失效[1]。功能梯度材料(functionally graded materials, FGMs)因具有承受高温、去除界面失配等优点,能克服以上一系列缺陷[2]。于是研究者将 FGMs 引入到压电器件的设计中,提出了功能梯度压电材料(functionally graded piezoelectric materials, FGPMs)。因为 FGPMs 具有高机电系数、高柔性度和高屈服强度的优点,在压电振动能量俘获等方面具有很多优势[3-4]。

围绕 FGPMs 结构的振动、主动控制和屈曲等问题,研究者做了很多工作。如果结构尺寸小至微纳米级时,其力学性能与宏观结构相比具有显著差异[5]。研究者针对这一问题提出了描述微观结构力学性能的修正偶应力理论[6]。基于修正的偶应力理论,ŞIMŞEK 等[7]探究了含孔隙 FGMs 微板在移动载荷作用下的受迫振动,KHORASANI 等[8]运用无网格局部 Petrov-Galerkin 法分析了 FGMs 板的静态弯曲行为,AMIR 等[9]讨论了 Pasternak 弹性支撑微米梁的热致自由振动。考虑大挠度行为以及小尺度效应,KOMIJANI 等[10]建立了 FGPMs 梁在多场耦合载荷作用下的非线性时变动力学模型。结合高阶剪切变形壳体和修正的偶应力理论,DEHSARAJI 等[11]研究了考虑厚度伸展效应的 FGPMs 微/纳米圆柱壳在均匀温度场和电场作用下的自由振动响应。

因材料制备或者加工制造等原因,FGPMs 结构内部不可避免地会出现纳米孔洞或孔隙[12]。为了更加准确地分析结构的振动行为,有必要在动力学建模中考虑孔隙对 FGPMs 结构振动的影响。考虑三项惯性力并应用 Kirchhoff 板理论,WANG[13]分析了平移状态下含均匀分布孔隙 FGPMs 板的非线性振动响应。采用改进的四变量剪切变形板理论,BARATI 等[14]研究了多种边界条件下 FGPMs 多孔板的热-力-电振动特性。应用非局部弹性理论和高阶剪切变形板理论,ZENKOUR 等[15]探究了热电载荷作用下含孔隙 FGPMs 纳米板的屈曲行为。考虑均匀和非均匀孔隙分布,SU 等[16]用改进的变分法分析了弹性支撑 FGPMs 梁的自由振动和瞬态响应。此外,考虑结构与周围弹性介质间的作用,研究者先后提出了模拟弹性介质的 Winkler 弹性支撑和 Pasternak 弹性支撑模型[17]。基于弹性支撑模型,陆续有研究者讨论了弹性支撑对结构振动特性的影响[18-20]。

尽管研究者对含孔隙 FGPMs 结构的振动问题开展了大量的研究,但是鲜有文献以修正的偶应力理论为基础,探讨弹性支撑 FGPMs 多孔微圆柱壳的振动响应。本研究以 Pasternak 弹性支撑 FGPMs 多孔微圆柱壳为对象,基于三阶剪切变形理论建立模型的几何方程以修正的偶应力理论反映微纳米结构所产生的尺度效应,进而推导出 FGPMs 微圆柱壳的多场耦合致振动方程,对 FGPMs 微圆柱壳的自由振动特性进行分析。研究结果可为压电微纳米器件的动力学设计提供一定的支撑。

1 FGPMs 微圆柱壳模型

如图 1 所示的 Pasternak 弹性支撑 FGPMs 多孔微圆柱壳,壳长为 L,壁厚为 h,中面半径为 R。弹性支撑均匀分布在微圆柱壳的外表面,其中包括弹性刚度系数为 k_w 的弹簧层和剪切刚度系数为 k_p 的剪切层。当剪切层刚度系数 k_p 等于 0 时,Pasternak 弹性支撑转化为 Winkler 弹性支撑。在圆柱壳的中面上建立坐标系,x、θ、z 和 y 轴分别表示壳体的轴向、环向、径向和中性层切线方向,u、v 和 w 分别表示中

面上任意点沿 x、y 和 z 方向的位移。

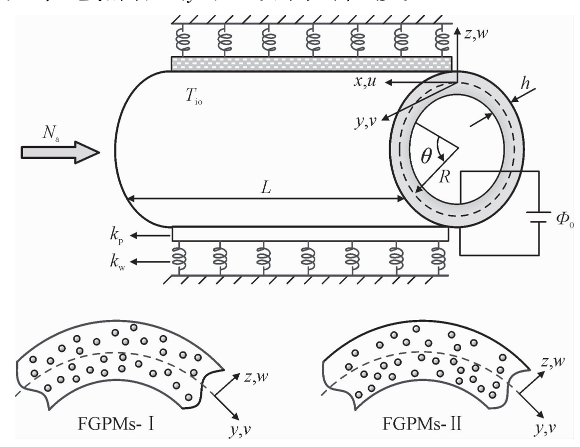


图 1　弹性支撑功能梯度压电多孔微圆柱壳模型

Fig. 1　Model of an FGPM porous cylindrical microshell resting on elastic foundation

微圆柱壳由两种压电材料按梯度组成,内表面为 PZT-4,外表面为 PZT-5H,材料特性如表 1 所示。假设材料属性沿厚度方向服从幂律分布,同时考虑均匀分布孔隙和非均匀分布孔隙两种孔隙分布,则微圆柱壳的有效材料属性表达式为[21]

$$P_{\mathrm{I}}(z)=(P_o-P_i)\Gamma^N+P_i-\frac{e_0}{2}(P_o+P_i) \quad (1)$$

$$P_{\mathrm{II}}(z)=(P_o-P_i)\Gamma^N+P_o-\frac{e_0}{2}(P_o+P_i)\left(1-\frac{2|z|}{h}\right) \quad (2)$$

式中:P_{I} 和 P_{II} 分别为 FGPMs-Ⅰ型均匀分布孔隙和 FGPMs-Ⅱ型非均匀分布孔隙下微圆柱壳的有效材料属性;P_i 和 P_o 分别为壳体内外表面的材料属性;$\Gamma=z/h+1/2$;N 为 PZT-4 的体积分数指数;e_0 为孔隙体积分数。

假设微圆柱壳受到热-力-电载荷的作用。如图 1 所示,在微圆柱壳内外表面施加热载荷 T_{io};沿轴向施加静态轴向力 N_a,N_a 为正表示轴向受拉,N_a 为负表示轴向受压;在内外表面间施加电载荷 Φ_0,Φ_0 为正表示电势方向与微圆柱壳极化方向相同,Φ_0 为负则表示相反。

假定温度变化仅出现在壳体厚度方向,根据一维傅里叶热传导方程,在壳体厚度方向上的温度梯度可以表示为[22]

$$T(z)=T_i-T_{io}\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right) \quad (3)$$

式中,$T_{io}=T_i-T_o$,T_i 和 T_o 分别为壳内外表面温度。

假设圆柱壳材料沿厚度方向由内向外表面极化,电势沿厚度方向呈二次分布,满足 Maxwell 电学方程[23]

$$\Phi(x,y,z,t)=\frac{2z\Phi_0}{h}+\xi(z)\varphi(x,y,t) \quad (4)$$

式中:$\varphi(x,y,t)$ 是圆柱壳因弹性变形而产生的感生电势;$\xi(z)=z^2-(h/2)^2$。

表 1　PZT-4 和 PZT-5H 的材料特性[11-12,24]

Tab. 1　Material properties of the PZT-4 and PZT-5H [11-12,24]

属性	PZT-4	PZT-5H
弹性常数/GPa	$c_{11}=139, c_{12}=77.8, c_{13}=74, c_{33}=115, c_{44}=25.6, c_{66}=30.6$	$c_{11}=126, c_{12}=79.1, c_{13}=83.9, c_{33}=117, c_{44}=23, c_{66}=23.5$
压电常数/($C\cdot m^{-2}$)	$e_{15}=12.7, e_{31}=-5.2, e_{33}=15.1$	$e_{15}=17, e_{31}=-6.5, e_{33}=23.3$
介电常数/($10^{-9} F\cdot m^{-1}$)	$s_{11}=6.46, s_{33}=5.62$	$s_{11}=15.05, s_{33}=13.02$
热模量/($10^5 N\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}$)	$\beta_{11}=5.19, \beta_{33}=4.8$	$\beta_{11}=5.19, \beta_{33}=4.8$
热释电/($10^{-5} C\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}$)	$p_1=5.4, p_3=5$	$p_1=5.4, p_3=5$
密度/($kg\cdot m^{-3}$)	$\rho=7\,600$	$\rho=7\,500$

2　FGPMs 微圆柱壳运动方程

基于三阶剪切变形壳体理论[25],圆柱壳的位移场可表示为

$$u_1=u+z\psi_x-\frac{4z^3}{3h^2}(w_{,x}+\psi_x),$$

$$u_2=v+z\psi_y-\frac{4z^3}{3h^2}(w_{,y}+\psi_y),$$

$$u_3=w \quad (5)$$

式中:下标中的逗号表示偏导;u_1、u_2 和 u_3 分别为壳内任意点沿 x、y 和 z 方向的位移;ψ_x 和 ψ_y 分别表示中面法线沿 x 和 y 方向的转角;t 表示时间。

假设圆柱壳处于平面应力状态,本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{C\varepsilon}-\boldsymbol{eE}-\Delta T\boldsymbol{\beta} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{sE}+\Delta T\boldsymbol{p} \quad (7)$$

式中:$\Delta T=T(z)-T_o$,假定圆柱壳的外表面温度 T_o 为零热应力状态($T_o=300$ K);$\boldsymbol{\sigma}$、$\boldsymbol{\varepsilon}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 分别

表示应力、应变、电场、电位移和热释电向量；$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{\beta}$和$\boldsymbol{s}$分别表示材料弹性常数、压电常数、热模量和介电常数矩阵。

由修正的偶应力理论得圆柱壳应变能U为

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi R}\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + m_{xx}\chi_{xx} + m_{yy}\chi_{yy} + m_{zz}\chi_{zz} + m_{xy}\chi_{xy} + m_{xz}\chi_{xz} + m_{yz}\chi_{yz} - D_xE_x - D_yE_y - D_zE_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{8}$$

式中：σ_{xx}和σ_{yy}分别为微圆柱壳x和y方向的正应力；τ_{xy}为xy面内的剪应力；τ_{yz}和τ_{xz}为z方向的剪应力；ε_{xx}、ε_{yy}和γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{xz}分别为相应方向上的正应变和剪应变；E_x、E_y和E_z为电场分量；D_x、D_y和D_z为电位移分量；χ_{ij}和$m_{ij}(i,j=x,y,z)$分别为对称旋转梯度分量和高阶应力分量，且有

$$m_{ij} = 2l^2c_{66\mathrm{e}}\chi_{ij} \tag{9}$$

式中：l为描述小尺度效应的材料特征长度；$c_{66\mathrm{e}}$为微圆柱壳的有效弹性常数，且有$c_{66\mathrm{e}}=c_{66}$。

微圆柱壳的动能K为

$$K = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi R}\int_{-h/2}^{h/2}\rho(z)(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{10}$$

式中，$\rho(z)$为微圆柱壳的有效密度。

热载荷和电载荷做的功W_F为

$$W_\mathrm{F} = -\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi R}[(N_{\mathrm{T}x} + N_{\mathrm{E}x})w_{,x}^2 + (N_{\mathrm{T}y})(+N_{\mathrm{E}y})w_{,y}^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11}$$

式中：$N_{\mathrm{T}x}$和$N_{\mathrm{T}y}$分别为温度在x和y方向引起的热载荷；$N_{\mathrm{E}x}$和$N_{\mathrm{E}y}$分别为外加电压Φ_0在x和y方向引起的电载荷。

静态轴向力做的功W_A为

$$W_\mathrm{A} = -\frac{N_\mathrm{a}}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi R}(v_{,x}^2 + w_{,x}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{12}$$

忽略弹性支撑的阻尼和惯性力，弹性载荷做的功W_S为

$$W_\mathrm{S} = -\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi R}[k_\mathrm{w}w^2 + k_\mathrm{p}(w_{,x}^2 + w_{,y}^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{13}$$

因此，微圆柱壳的能量函数可表示为

$$\Pi = K - U + W_\mathrm{F} + W_\mathrm{A} + W_\mathrm{S} \tag{14}$$

通过Hamilton公式可推出圆柱壳运动方程

$$I_0\ddot{u} - \frac{4I_3}{3h^2}\ddot{w}_{,x} + \left(I_1 - \frac{4I_3}{3h^2}\right)\ddot{\psi}_x = N_{xx,x} + N_{xy,y} + \frac{1}{2}(Y_{xz,xy} + Y_{yz,yy}) + \frac{1}{2R}(Y_{yy,y} - Y_{zz,y}) \tag{15}$$

$$I_0\ddot{v} - \frac{4I_3}{3h^2}\ddot{w}_{,y} + \left(I_1 - \frac{4I_3}{3h^2}\right)\ddot{\psi}_y = N_{yy,y} + N_{xy,x} - \frac{1}{2}(Y_{xz,xx} + Y_{yz,xy}) + \frac{Q_y}{R} + \frac{1}{2R^2}Y_{xz} + N_\mathrm{a}v_{,xx} - \frac{1}{2R}(Y_{xx,x} + Y_{yy,x} - Y_{xy,y}) \tag{16}$$

$$\frac{4I_3}{3h^2}(\ddot{u}_{,x} + \ddot{v}_{,y}) + \left(\frac{4I_4}{3h^2} - \frac{16I_6}{9h^4}\right)(\ddot{\psi}_{x,x} + \ddot{\psi}_{y,y}) + I_0\ddot{w} - \frac{16I_6}{9h^4}(\ddot{w}_{,xx} + \ddot{w}_{,yy}) = \frac{4}{3h^2}(S_{xx,xx} + S_{yy,yy} + 2S_{xy,xy}) - \frac{N_{yy}}{R} + Q_{x,x} + Q_{y,y} - \frac{4}{h^2}(J_{x,x} + J_{y,y}) + N_\mathrm{a}w_{,xx} + \frac{1}{2R}(Y_{xz,y} - Y_{yz,x}) + \frac{1}{2}(Y_{yy,xy} - Y_{xx,xy} + Y_{xy,xx} - Y_{xy,yy}) + \frac{4}{h^2}(H_{xz,y} + H_{yz,x}) + k_\mathrm{p}(w_{,xx} + w_{,yy}) - k_\mathrm{w}w + \frac{2}{h^2}(P_{yy,xy} - P_{xx,xy} + P_{xy,xx} - P_{xy,yy}) - (N_{\mathrm{T}x} + N_{\mathrm{E}x})w_{,xx} - (N_{\mathrm{T}y} + N_{\mathrm{E}y})w_{,yy} \tag{17}$$

$$\left(I_2 - \frac{8}{3h^2}I_4 + \frac{16}{9h^4}I_6\right)\ddot{\psi}_x + \left(\frac{16}{9h^4}I_6 - \frac{4}{3h^2}I_4\right)\ddot{w}_{,x} + \left(I_1 - \frac{4I_3}{3h^2}\right)\ddot{u} = M_{xx,x} + M_{xy,y} - \frac{4}{h^2}H_{yz} - Q_x + \frac{4}{h^2}J_x + \frac{1}{2}(Y_{yy,y} + Y_{xy,x} - Y_{zz,y}) - \frac{1}{2R}Y_{yz} + \frac{2}{h^2}(P_{zz,y} - P_{xy,x} - P_{yy,y}) - \frac{4}{3h^2}(S_{xx,x} + S_{xy,y}) + \frac{1}{2}(H_{xz,xy} + H_{yz,yy}) - \frac{2}{3h^2}(T_{xz,xy} + T_{yz,yy}) \tag{18}$$

$$\left(I_2 - \frac{8}{3h^2}I_4 + \frac{16}{9h^4}I_6\right)\ddot{\psi}_y + \left(I_1 - \frac{4I_3}{3h^2}\right)\ddot{v} + \left(\frac{16}{9h^4}I_6 - \frac{4}{3h^2}I_4\right)\ddot{w}_{,y} = \frac{2}{3h^2}(T_{xz,xx} + T_{yz,xy}) + M_{yy,y} + M_{xy,x} - \frac{4}{3h^2}(S_{yy,y} + S_{xy,x}) - Q_y + \frac{4}{h^2}J_y + \frac{1}{2}(Y_{zz,x} - Y_{xy,y} - Y_{xx,x}) - \frac{1}{2R}Y_{xz} - \frac{4}{h^2}H_{xz} - \frac{1}{2}(H_{yz,xy} + H_{xz,xx}) + \frac{2}{h^2}(P_{xx,x} - P_{zz,x} + P_{xy,y}) \tag{19}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}[\xi(z)D_{x,x} + \xi(z)D_{y,y} - 2zD_z]\mathrm{d}z = 0 \tag{20}$$

各经典和非经典的力和力矩，以及广义惯性常数的具体表达式为

$$\begin{cases}(N_{xx},N_{yy},N_{xy})=\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy})\mathrm{d}z\\(M_{xx},M_{yy},M_{xy})=\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy})z\mathrm{d}z\\(S_{xx},S_{yy},S_{xy})=\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy})z^3\mathrm{d}z\\(Q_x,Q_y)=\int_{-h/2}^{h/2}(\tau_{xz},\tau_{yz})\mathrm{d}z\\(J_x,J_y)=\int_{-h/2}^{h/2}(\tau_{xz},\tau_{yz})z^2\mathrm{d}z\end{cases}\tag{21}$$

$$\begin{cases}(Y_{xx},Y_{yy},Y_{zz},Y_{xy},Y_{xz},Y_{yz})\\=\int_{-h/2}^{h/2}(m_{xx},m_{yy},m_{zz},m_{xy},m_{xz},m_{yz})\mathrm{d}z\\(H_{xz},H_{yz})=\int_{-h/2}^{h/2}(m_{xz},m_{yz})z\mathrm{d}z\\(P_{xx},P_{yy},P_{zz},P_{xy},P_{xz},P_{yz})\\=\int_{-h/2}^{h/2}(m_{xx},m_{yy},m_{zz},m_{xy},m_{xz},m_{yz})z^2\mathrm{d}z\\(T_{xz},T_{yz})=\int_{-h/2}^{h/2}(m_{xz},m_{yz})z^3\mathrm{d}z\end{cases}\tag{22}$$

$$(I_0,I_1,I_2,I_3,I_4,I_6)=\int_{-h/2}^{h/2}\rho(z)(1,z,z^2,z^3,z^4,z^6)\mathrm{d}z\tag{23}$$

3　FGPMs 微圆柱壳模态频率求解

假设微圆柱壳的两端简支,那么在任意单一模态下运动控制方程(15)~(20)的解可假设为

$$\begin{aligned}&u(x,y,t)=u_{mn}\mathrm{e}^{i\omega t}\cos(\lambda_m x)\cos(ny/R),\\&v(x,y,t)=v_{mn}\mathrm{e}^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(ny/R),\\&w(x,y,t)=w_{mn}\mathrm{e}^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\cos(ny/R),\\&\psi_x(x,y,t)=\psi_{xmn}\mathrm{e}^{i\omega t}\cos(\lambda_m x)\cos(ny/R),\\&\psi_y(x,y,t)=\psi_{ymn}\mathrm{e}^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(ny/R),\\&\varphi(x,y,t)=\varphi_{mn}\mathrm{e}^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\cos(ny/R)\end{aligned}\tag{24}$$

式中:$\lambda_m=m\pi/L$;m 和 n 分别为微圆柱壳的轴向半波数和环向波数;u_{mn}、v_{mn}、w_{mn}、ψ_{xmn}、ψ_{ymn} 和 φ_{mn} 为振型系数;ω 为角频率。

将方程(24)代入运动控制方程,可推出微圆柱壳的模态频率方程

$$(\boldsymbol{K}-T_{\mathrm{io}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}-N_{\mathrm{a}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}-\Phi_0\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{d}=0\tag{25}$$

式中:$\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵;$\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}$ 和 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}$ 分别为温度梯度 T_{io}、静态轴向力 N_{a} 和外加电压 Φ_0 对应的系数矩阵;$\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵;$\boldsymbol{d}$ 为振型系数向量。

为便于分析讨论,将角频率、静态轴向力和弹性支撑的刚度系数量纲归一化,即

$$\begin{cases}\Omega=\omega R\sqrt{\rho/E}\\N_0=\dfrac{R\sqrt{3(1-\upsilon)}N_{\mathrm{a}}}{Eh^2}\\K_{\mathrm{w}}=\dfrac{12k_{\mathrm{w}}R^4(1-\upsilon)^2}{Eh^3}\\K_{\mathrm{p}}=\dfrac{12k_{\mathrm{p}}R^4(1-\upsilon)^2}{Eh^3}\end{cases}\tag{26}$$

式中,E、ρ 和 υ 分别为 PZT-4 的弹性模量、密度和泊松比。

为验证模型的准确性,首先将模型退化为纯 $\mathrm{BaTiO_3}$ 压电圆柱壳。图 2 比较了应用本研究方法和应用文献方法所得的结果。与文献不同的是,本研究模型应用了三阶剪切变形理论,并通过修正的偶应力理论反映了微纳米结构所产生的尺度效应。分析结果发现,本研究模型所得结果与文献[26]和[27]结果误差在 2% 左右,且最大误差小于 4%,验证了本研究所采用方法的合理性。进一步将现有模型简化为纳米圆柱壳,表 2 结果与文献对比表明本文模型所得结果与文献[11]和[24]结果比较吻合。

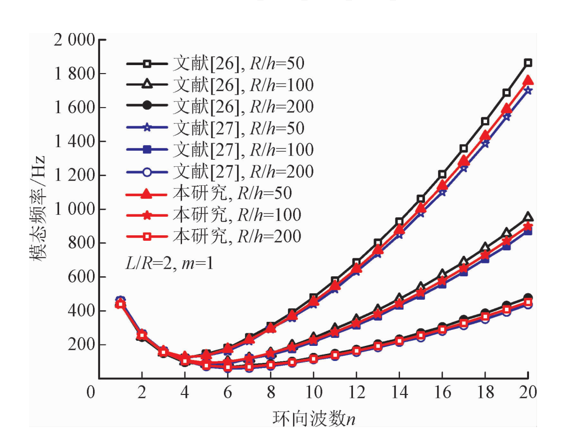


图 2 压电圆柱壳模态频率的比较

Fig. 2　Comparison of modal frequencies of piezoelectric cylindrical shells

4　分析与讨论

如无特殊说明,本研究微圆柱壳的几何尺寸分别取:$R=1\ \mu\mathrm{m}$,$L/R=1$,$h/R=0.02$;材料特征长度 $l=3h$;孔隙体积分数 $e_0=0.5$,体积分数指数 $N=1$;外加电压 $\Phi_0=1$ V,无量纲静态轴向力 $N_0=0.5$,热载荷 $T_{\mathrm{io}}=300$ K;无量纲刚度系数(K_{w}, K_{p})=(1 000,1)。

表2 不同厚度下纳米圆柱壳无量纲模态频率的比较

Tab.2 Comparison of dimensionless modal frequencies of cylindrical nanoshells under different thicknesses

h/R	n	$l=0$			$l=h$		
		文献[11]	文献[28]	本研究	文献[11]	文献[28]	本研究
0.1	1	0.978	0.932	0.936	1.179	1.135	1.163
	2	0.820	0.775	0.781	1.144	1.085	1.164
	3	0.746	0.711	0.717	1.308	1.241	1.364
0.2	1	1.085	1.043	1.051	1.645	1.608	1.689
	2	1.009	0.967	0.974	1.771	1.690	1.908
	3	1.090	1.051	1.055	2.201	2.086	2.439
0.3	1	1.211	1.173	1.183	2.057	2.045	2.210
	2	1.206	1.160	1.167	2.242	2.159	2.566
	3	1.388	1.337	1.334	2.785	2.652	3.271

4.1 环向波数的影响

表3研究了环向波数对微圆柱壳无量纲模态频率的影响。可以得出：在低环向波数下，FGPMs-Ⅰ型微圆柱壳的模态频率大于FGPMs-Ⅱ型微圆柱壳的模态频率，而环向波数较大时则相反。表明孔隙的分布形式对环向振动的影响较大。无论是FGPMs-Ⅰ型还是FGPMs-Ⅱ型，无弹性支撑和Winkler弹性支撑下圆柱壳的基频均在$(m,n)=(1,3)$处；而Pasternak弹性支撑下圆柱壳的基频出现在$(m,n)=(1,1)$处。究其原因，Winkler弹性支撑只影响微圆柱壳的径向振动，而Pasternak弹性支撑不但影响微圆柱壳的径向振动，还影响环向振动。不同孔隙分布下，Winkler和Pasternak弹性支撑均可提高模态频率，且在低环向波数下效果明显。这是因为弹性支撑的作用相当于对圆柱壳施加了约束，提高了结构刚度。相较于Winkler弹性支撑，Pasternak弹性支撑可较大幅度提高模态频率。因此，在不改变结构尺寸时，选择Pasternak弹性支撑能调节微圆柱壳模态频率，以避免结构发生共振。

表3 环向波数对无量纲模态频率的影响

Tab.3 Effects of circumferential wave number on dimensionless modal frequency

n	FGPMs-Ⅰ			FGPMs-Ⅱ		
	$(K_w,K_p)=(0,0)$	$(K_w,K_p)=(1\,000,0)$	$(K_w,K_p)=(1\,000,1)$	$(K_w,K_p)=(0,0)$	$(K_w,K_p)=(1\,000,0)$	$(K_w,K_p)=(1\,000,1)$
1	0.868 8	0.909 1	2.020 3	0.841 4	0.869 4	2.010 0
2	0.713 8	0.761 1	2.240 4	0.682 4	0.715 7	2.233 2
3	0.636 0	0.689 0	2.580 9	0.604 1	0.641 8	2.576 4
4	0.720 2	0.768 2	3.006 8	0.696 4	0.729 8	3.004 1
5	0.961 1	0.998 1	3.489 9	0.947 7	0.972 8	3.488 5
6	1.315 2	1.342 8	4.013 1	1.309 8	1.328 3	4.012 5
7	1.757 0	1.777 8	4.566 2	1.757 4	1.771 3	4.566 5
8	2.276 1	2.292 3	5.143 9	2.281 2	2.291 9	5.144 9
9	2.868 3	2.881 2	5.743 2	2.877 4	2.885 9	5.745 0
10	3.531 8	3.542 3	6.362 7	3.544 5	3.551 5	6.365 3
12	5.068 4	5.075 7	7.660 4	5.088 4	5.093 2	7.665 0
15	7.889 2	7.893 9	9.756 8	7.921 1	7.924 3	9.765 5
18	11.317 1	11.320 4	12.046 5	11.363 9	11.366 0	12.060 6
20	13.679 7	13.679 8	13.689 2	13.702 0	13.702 0	13.707 7

4.2 外部载荷的影响

表4～表6分别描述了热、力、电3种载荷单独变化下，结构模态频率的变化情况。表4研究了温度对圆柱壳无量纲模态频率的影响。结果表明：在无弹性支撑和Winkler弹性支撑下，因为温度降低了圆柱壳的刚度，所以增大温度梯度，圆柱壳的模态频率减小。在Pasternak弹性支撑下，温度对模态频率基本无影响。这是由于Pasternak弹性支撑较大程度的提高了结构刚度，增大温度梯度不易改变结构刚度。相比无弹性支撑，Winkler弹性支撑下温度对模态频率影响较小。尤其是Pasternak弹性支撑下，

模态频率随温度基本无变化。因此弹性支撑会降低温度对模态频率的影响。在无弹性支撑和 Winkler 弹性支撑下,孔隙体积分数越大,微圆柱壳对温度越敏感。说明低孔隙体积分数可相对较好的抵抗高温度梯度。比较发现,FGPMs-Ⅰ型孔隙分布对温度梯度更敏感。例如,当 $e_0 = 0.2$ 且温度梯度从 0 增大到 800 K 时,孔隙分布为 FGPMs-Ⅰ型的模态频率分别减小了 0.916% 和 0.854%;孔隙分布为 FGPMs-Ⅱ型的微圆柱壳模态频率分别减小了 0.815% 和 0.769%。究其原因,两种孔隙下圆柱壳对温度的敏感性不同主要体现在结构的有效热释电常数上。因此,高温环境下工作时,可考虑 FGPMs-Ⅱ型孔隙分布。

表 4　温度梯度对无量纲模态频率的影响

Tab. 4　Effects of temperature gradient on dimensionless modal frequency

e_0	(K_w, K_p)	FGPMs-Ⅰ					FGPMs-Ⅱ				
		$T_{io}=0$ K	$T_{io}=200$ K	$T_{io}=400$ K	$T_{io}=600$ K	$T_{io}=800$ K	$T_{io}=0$ K	$T_{io}=200$ K	$T_{io}=400$ K	$T_{io}=600$ K	$T_{io}=800$ K
0.2	(0,0)	0.840 4	0.838 5	0.836 6	0.834 6	0.832 7	0.834 3	0.832 6	0.830 9	0.829 2	0.827 5
	(1 000,0)	0.866 6	0.864 8	0.862 9	0.861 1	0.859 2	0.857 9	0.856 2	0.854 6	0.852 9	0.851 3
	(1 000,1)	2.008 2	2.008 2	2.008 2	2.008 2	2.008 2	2.006 0	2.006 0	2.006 0	2.006 0	2.006 0
0.4	(0,0)	0.858 8	0.856 3	0.853 7	0.851 2	0.848 7	0.840 7	0.838 8	0.836 9	0.835 0	0.833 1
	(1 000,0)	0.892 9	0.890 5	0.888 1	0.885 6	0.883 2	0.866 9	0.865 1	0.863 2	0.861 4	0.859 5
	(1 000,1)	2.014 9	2.014 9	2.014 9	2.014 9	2.014 9	2.008 6	2.008 6	2.008 6	2.008 6	2.008 6
0.6	(0,0)	0.894 8	0.891 1	0.887 4	0.883 7	0.879 9	0.848 7	0.846 6	0.844 4	0.842 3	0.840 1
	(1 000,0)	0.943 5	0.940 0	0.936 5	0.933 0	0.929 4	0.878 4	0.876 3	0.874 2	0.872 1	0.870 1
	(1 000,1)	2.028 3	2.028 3	2.028 3	2.028 3	2.028 3	2.011 6	2.011 6	2.011 6	2.011 6	2.011 6

表 5 描述了轴向力对圆柱壳无量纲模态频率的影响情况。当圆柱壳轴向受拉时,模态频率随轴向力的增大而增大;当轴向受压时,模态频率随轴向力的增大而减小。这是因为轴向拉力增大了微圆柱壳的刚度,轴向压力减小了圆柱壳的刚度。Pasternak 弹性支撑下圆柱壳对轴向力敏感性最弱,Winkler 弹性支撑次之,无弹性支撑时敏感性最强。考虑弹性支撑会降低轴向力对模态频率的影响。

表 5　轴向力对无量纲模态频率的影响

Tab. 5　Effects of axial load on dimensionless modal frequency

e_0	(K_w, K_p)	FGPMs-Ⅰ					FGPMs-Ⅱ				
		$N_0=-1$	$N_0=-0.5$	$N_0=0$	$N_0=0.5$	$N_0=1$	$N_0=-1$	$N_0=-0.5$	$N_0=0$	$N_0=0.5$	$N_0=1$
0.2	(0,0)	0.663 0	0.725 8	0.783 7	0.837 5	0.888 1	0.677 5	0.732 6	0.783 8	0.831 8	0.877 2
	(1 000,0)	0.695 9	0.756 1	0.811 8	0.863 9	0.913 0	0.706 3	0.759 3	0.808 8	0.855 4	0.899 6
	(1 000,1)	1.948 3	1.968 6	1.988 5	2.008 2	2.027 7	1.953 0	1.970 9	1.988 6	2.006 1	2.023 5
0.4	(0,0)	0.617 9	0.705 9	0.784 0	0.855 0	0.920 6	0.663 4	0.726 2	0.784 0	0.837 8	0.888 4
	(1 000,0)	0.664 5	0.747 0	0.821 2	0.889 3	0.952 5	0.696 3	0.756 4	0.812 1	0.864 2	0.913 3
	(1 000,1)	1.934 9	1.962 1	1.988 7	2.015 0	2.040 7	1.948 7	1.968 9	1.988 9	2.008 6	2.028 0
0.6	(0,0)	0.516 9	0.664 6	0.785 0	0.889 3	0.982 5	0.644 6	0.717 9	0.784 3	0.845 5	0.902 6
	(1 000,0)	0.597 2	0.728 9	0.840 1	0.938 3	1.027 1	0.683 2	0.752 7	0.816 3	0.875 3	0.930 5
	(1 000,1)	1.907 7	1.948 9	1.989 1	2.028 3	2.066 5	1.943 1	1.966 3	1.989 1	2.011 6	2.033 8

据表 5 可知,孔隙体积分数越大,轴向力对模态频率影响越大。且无论在轴向拉力或轴向压力下,大轴向载荷时孔隙体积分数对模态频率的影响较大。因此选择高孔隙体积分数及大轴向载荷课调节模态频率。比较发现,FGPMs-Ⅰ型孔隙分布比 FGPMs-Ⅱ型孔隙分布对轴向力更敏感。例如,当孔隙体积分数 $e_0 = 0.2$ 时,当无量纲轴向力从 −1 增加到 1,3 种弹性支撑下,孔隙分布为 FGPMs-Ⅰ型的圆柱壳模态频率分别增加了 33.952%、31.197% 和 4.075%;孔隙分布为 FGPMs-Ⅱ型的圆柱壳模态频

率分别增加了 29.476%、27.368% 和 3.610%。这主要是因为两种孔隙下有效弹性常数和有效质量密度的贡献比不同而导致敏感性不同。因此,若通过轴向力来调节微圆柱壳的模态频率,可选 FGPMs-Ⅰ型孔隙分布。

表 6 分析了电压对圆柱壳无量纲模态频率的影响。在无弹性支撑和 Winkler 弹性支撑下,施加正电压时模态频率减小,施加负电压时模态频率增大。这是因为正电压降低了微圆柱壳的刚度,而负电压增大了微圆柱壳的刚度。因此,在这两种弹性支撑下,可通过改变外加电压的方向和幅值来调节模态频率。而在 Pasternak 弹性支撑下,电压对模态频率基本无影响。此时 Pasternak 弹性支撑起主导作用,通过改变外加电压来调节模态频率的效果不明显。与热和轴向力情况下相同,考虑弹性支撑可降低电压对模态频率的影响。在无弹性支撑和 Winkler 弹性支撑下,减小孔隙体积分数会增大电压对模态频率的影响。且在高外加正电压下,孔隙体积分数对模态频率的影响尤其显著。因此,可通过选择低孔隙体积分数及高外加正电压参数来调节模态频率。在无弹性支撑和 Winkler 弹性支撑下,改变电压时 FGPMs-Ⅱ型孔隙下模态频率的变化较大。例如,当 $e_0=0.2$ 时,当电压从 −1 增加到 1,孔隙分布为 FGPMs-Ⅰ型的微圆柱壳模态频率分别减少了 23.059% 和 22.073%;孔隙分布为 FGPMs-Ⅱ型的微圆柱壳模态频率分别减少了 23.259% 和 22.370%。这是由于两种孔隙对有效弹性常数的影响不同而导致的。因此,可选择 FGPMs-Ⅱ型孔隙分布来调节模态频率。

表 6 电压对无量纲模态频率的影响

Tab.6 Effects of applied voltage on dimensionless modal frequency

e_0	(K_w,K_p)	FGPMs-Ⅰ					FGPMs-Ⅱ				
		$N_0=-1$	$N_0=-0.5$	$N_0=0$	$N_0=0.5$	$N_0=1$	$N_0=-1$	$N_0=-0.5$	$N_0=0$	$N_0=0.5$	$N_0=1$
0.2	(0,0)	1.088 5	1.031 8	0.971 6	0.907 1	0.837 5	1.083 9	1.027 0	0.966 5	0.901 8	0.831 8
	(1 000,0)	1.108 6	1.053 1	0.994 2	0.931 4	0.863 9	1.101 9	1.046 0	0.986 8	0.923 5	0.855 4
	(1 000,1)	2.008 2	2.008 2	2.008 2	2.008 2	2.008 2	2.006 1	2.006 1	2.006 1	2.006 1	2.006 1
0.4	(0,0)	1.102 6	1.046 5	0.987 0	0.923 5	0.855 0	1.088 6	1.032 0	0.971 8	0.907 4	0.837 8
	(1 000,0)	1.129 1	1.074 4	1.016 7	0.955 2	0.889 3	1.108 8	1.053 3	0.994 4	0.931 7	0.864 2
	(1 000,1)	2.015 0	2.015 0	2.015 0	2.015 0	2.015 0	2.008 6	2.008 6	2.008 6	2.008 6	2.008 6
0.6	(0,0)	1.131 2	1.076 1	1.017 8	0.955 8	0.889 3	1.094 7	1.038 3	0.978 5	0.914 5	0.845 5
	(1 000,0)	1.169 6	1.116 6	1.060 7	1.001 4	0.938 3	1.117 6	1.062 5	1.004 2	0.942 0	0.875 3
	(1 000,1)	2.028 3	2.028 3	2.028 3	2.028 3	2.028 3	2.011 6	2.011 6	2.011 6	2.011 6	2.011 6

以上分析表明,两种孔隙分布下微圆柱壳的模态频率随温度、轴向力和电压的变化趋势相同,只是数值上的差异,可根据实际情况选择何种孔隙分布。为简化分析,在以下讨论中只考虑 FGPMs-Ⅰ型孔隙分布。

4.3 不同弹性支撑和材料体积分数的影响

图 3~5 分别为在不同弹性支撑和材料体积分数指数下无量纲模态频率随温度、轴向力和电压的变化曲线。

结果表明,无弹性支撑下,材料体积分数指数越大,微圆柱壳的模态频率越大且随温度、轴向力和电压的变化率越小。这是因为材料体积分数指数越大,PZT-4 的占比越大,圆柱壳的刚度增大。说明增大 PZT-4 的占比,圆柱壳可承受高温度、大轴向载荷以及高电压。在 Pasternak 弹性支撑下,圆柱壳的模态频率随轴向力变化明显。而改变温度梯度或外加电压,模态频率基本不变。此时可通过改变材料体积分数指数来调节微圆柱壳的模态频率,并可以达到良好的效果。

4.4 孔隙体积分数的影响

图 6 为无量纲模态频率随孔隙体积分数的变化曲线。结果表明,当孔隙体积分数小于 0.2 时,模态频率变化不大;当孔隙体积分数大于 0.5 时,增大孔隙体积分数模态频率的变化趋势明显不同。无论在无弹性支撑下还是在 Pasternak 弹性支撑下,当材料体积分数指数较小时,模态频率随孔隙体积分数的增大而逐渐减小;当材料体积分数指数较大时,模态频率随孔隙体积分数的增大而增大。究其原因,这可以从孔隙体积分数改变有效弹性模量和有效密度

的角度来说明。当材料体积分数指数较小时,微圆柱壳的刚度较小。此时增大孔隙体积分数,造成对有效弹性模量的削减大于有效密度;当材料体积分数指数较大时,增大孔隙体积分数,显著降低了微圆柱壳的有效密度。

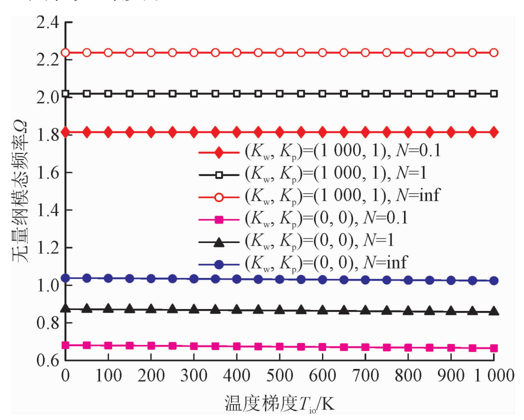


图 3　无量纲模态频率随温度梯度的变化曲线

Fig. 3　Vibration of dimensionless modal frequency with temperature gradient

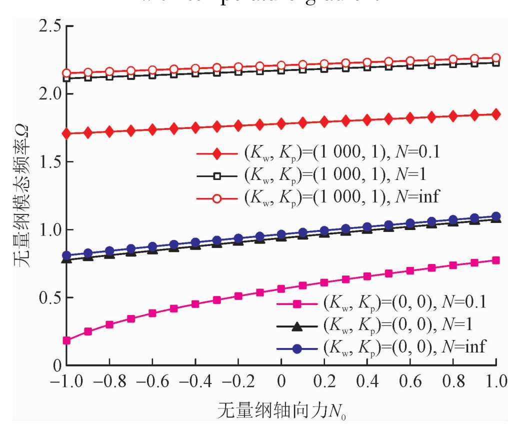


图 4　无量纲模态频率随轴向力的变化曲线

Fig. 4　Vibration of dimensionless modal frequency with axial load

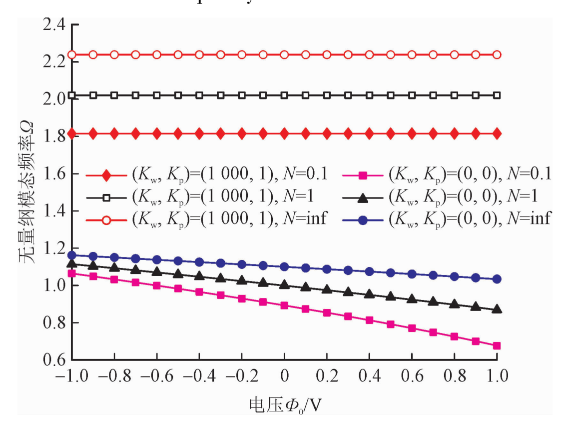


图 5　无量纲模态频率随电压的变化曲线

Fig. 5　Vibration of dimensionless modal frequency with applied voltage

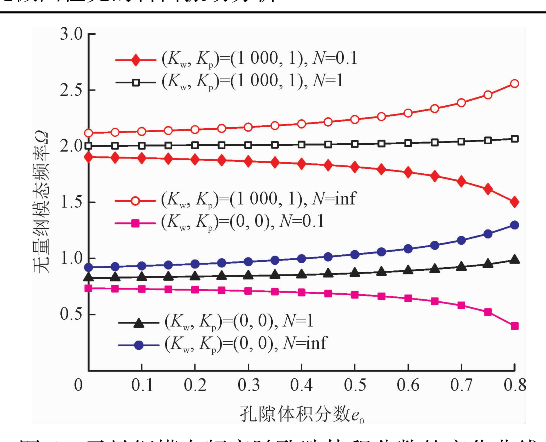


图 6　无量纲模态频率随孔隙体积分数的变化曲线

Fig. 6　Vibration of dimensionless modal frequency with porosity volume fraction

4.5　壳体厚度的影响

图 7 和图 8 分别展示了基于经典连续体理论和修正的偶应力理论下,微圆柱壳无量纲模态频率随厚度参数的变化情况。

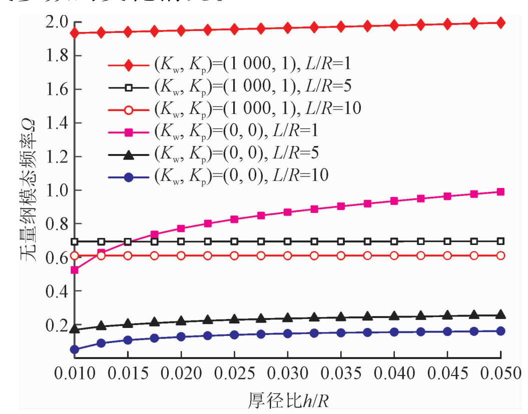


图 7　无量纲模态频率随壳体厚度的变化曲线($l=0$)

Fig. 7　Vibration of dimensionless modal frequency with shell thickness ($l=0$)

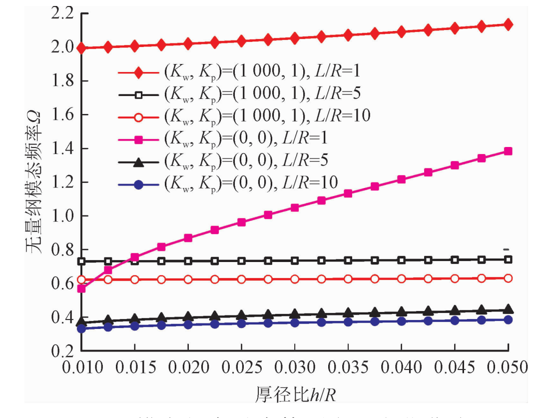


图 8　无量纲模态频率随壳体厚度的变化曲线($l=3h$)

Fig. 8　Vibration of dimensionless modal frequency with shell thickness ($l=3h$)

结果表明,基于修正的偶应力理论的模态频率

大于基于经典连续体理论的模态频率。说明考虑材料特征长度会使得微圆柱壳的刚度变大。随着壳体厚度增加,有无弹性支撑之间的模态频率逐渐减小,在 $0.01 \leqslant h/R \leqslant 0.02$ 时,微圆柱壳的模态频率差异明显。说明 Pasternak 弹性支撑对薄壳的影响更大。究其原因,薄壳较“软”,弹性支撑对其作用效果显著。对于不同长度的微圆柱壳,对比其在有无弹性支撑下的模态频率,在 $1 \leqslant L/R \leqslant 5$ 之间,发现 Pasternak 弹性支撑提高短圆柱壳的模态频率更加显著。这主要是因为 Pasternak 弹性支撑中的剪切层对短圆柱壳的作用效果更明显。

5 结 论

基于修正的偶应力理论和三阶剪切变形壳体理论推导了弹性支撑功能梯度压电多孔微圆柱壳的运动方程,分析了各种参数对微圆柱壳模态频率的影响。主要结论如下。

1) Winkler 弹性支撑仅影响微圆柱壳的径向振动,而 Pasternak 弹性支撑影响径向和环向振动。与 Winkler 弹性支撑相比,Pasternak 弹性支撑可较大幅度提高微圆柱壳的模态频率。

2) 改变弹性支撑的刚度系数、轴向力、外加电压、孔隙分布类型、孔隙体积分数、材料体积分数指数和结构尺寸等,均可起到调节微圆柱壳模态频率的作用。温度、轴向压力和外加正电压均降低微圆柱壳的刚度,而轴向拉力和外加负电压增大微圆柱壳的刚度。

3) 增大孔隙体积分数,温度载荷或外加轴向力对模态频率的影响增大,外加电压对模态频率的影响减小。在不同的材料体积分数指数下,增大孔隙体积分数模态频率的变化趋势不同。

4) 弹性支撑会降低温度、轴向力和电压对模态频率的影响,对于 Pasternak 弹性支撑而言尤其明显。Pasternak 弹性支撑对短圆柱壳或薄圆柱壳的模态频率影响更加显著。

参考文献:

[1] 刘涛,汪超,刘庆运,等. 基于等几何方法的压电功能梯度板动力学及主动振动控制分析[J]. 工程力学,2020,37(12):228-242.
LIU Tao,WANG Chao,LIU Qingyun,et al. Analysis for dynamic and active vibration control of piezoelectric functionally graded plates based on isogeometric method[J]. Engineering mechanics, 2020,37(12):228-242(in Chinese).

[2] 刘文光,舒斌,郭隆清,等. 热环境对 FGM 壳模态频率的影响[J]. 振动与冲击,2017,36(4):127-131.
LIU Wenguang,SHU Bin,GUO Longqing,et al. Impacts of thermal environment on modal frequency of FGM shells[J]. Journal of vibration and shock,2017,36(4):127-131(in Chinese).

[3] 刘超,刘文光. 热流温度场下功能梯度板的热问题研究[J]. 工程设计学报,2021,28(2):210-217.
LIU Chao, LIU Wenguang. Study on thermal problems of functionally graded plate under heat flux temperature field[J]. Chinese journal of engineering design,2021,28(2):210-217(in Chinese).

[4] DERAYATIFAR M,SEDAGHATI R,CHANDRAMOHAN S,et al. Dynamic analysis of a functionally graded piezoelectric energy harvester under magnetic interaction[J]. Journal of intelligent material systems and structures,2021,32(9):986-1000.

[5] WANG Z J, MARUYAMA K, NARITA F. A novel manufacturing method and structural design of functionally graded piezoelectric composites for energy-harvesting[J]. Materials & design, 2022, 214:110371.

[6] 周凤玺,蒲育. 功能梯度压电材料梁的热-机-电耦合振动及屈曲特性分析[J]. 机械工程学报,2021,57(8):166-174.
ZHOU Fengxi, PU Yu. Vibration and buckling behaviors of functionally graded piezoelectric material beams subjected to thermal-mechanical-electrical loads[J]. Journal of mechanical engineering,2021,57(8):166-174(in Chinese).

[7] ŞIMŞEK, AYDIN M. Size-dependent forced vibration of an imperfect functionally graded (FG) microplate with porosities subjected to a moving load using the modified couple stress theory[J]. Composite structures,2017,160:408-421.

[8] KHORASANI V S,BAYAT M. Bending analysis of FG plates using a general third-order plate theory with modified couple stress effect and MLPG method[J]. Engineering analysis with boundary elements,2018,94:159-171.

[9] AMIR S, SOLEIMANI-JAVID Z, ARSHID E. Size-dependent free vibration of sandwich micro beam with porous core subjected to thermal load based on SSDBT[J]. Journal of applied mathematics and mechanics,2019,99(9):e201800334.

[10] KOMIJANI M, GRACIE R. Nonlinear thermo-electro-mechanical dynamic behaviour of FGPM beams[J]. Composite structures, 2016,150:208-218.

[11] DEHSARAJI M L, AREFI M, LOGHMAN A. Size dependent free vibration analysis of functionally graded piezoelectric micro/nano shell based on modified couple stress theory with considering thickness stretching effect[J]. Defence technology,2021,17(1):

119-134.

[12] LIU Y F, WANG Y Q. Thermo-electro-mechanical vibrations of porous functionally graded piezoelectric nanoshells [J]. Nanomaterials,2019,9(2):301.

[13] WANG Y Q. Electro-mechanical vibration analysis of functionally graded piezoelectric porous plates in the translation state[J]. Acta astronautica,2018,143:263-271.

[14] BARATI M R,ZENKOUR A M. Electro-thermoelastic vibration of plates made of porous functionally graded piezoelectric materials under various boundary conditions[J]. Journal of vibration and control,2018,24(10):1910-1926.

[15] ZENKOUR A M, ALJADANI M H. Porosity effect on thermal buckling behavior of actuated functionally graded piezoelectric nanoplates[J]. European journal of mechanics-a/solids, 2019, 78:103835.

[16] SU J P, QU Y G, ZHANG K, et al. Vibration analysis of functionally graded porous piezoelectric deep curved beams resting on discrete elastic supports[J]. Thin-walled structures, 2021, 164:107838.

[17] TONZANI G M,ELISHAKOFF I. Three alternative versions of the theory for a Timoshenko - Ehrenfest beam on a winkler-pasternak foundation[J]. Mathematics and mechanics of solids, 2021, 26 (3):299-324.

[18] 黄小林,董雷,钟德月,等.弹性地基上含孔隙功能梯度材料板的自由振动和动力响应[J].应用力学学报,2021,38(1):402-408.

HUANG Xiaolin,DONG Lei,ZHONG Deyue,et al. Free vibration and dynamic response of porous functionally graded plates on elastic foundation[J]. Chinese journal of applied mechanics,2021,38(1):402-408(in Chinese).

[19] LIU J C, DENG X W, WANG Q S, et al. A unified modeling method for dynamic analysis of GPL-reinforced FGP plate resting on winkler-pasternak foundation with elastic boundary conditions [J]. Composite structures,2020,244:112217.

[20] 黄小林,魏耿忠,刘思奇,等.黏弹性地基上石墨烯增强功能梯度矩形板的自由振动和动力响应[J].应用力学学报,2021,38(3):1202-1208.

HUANG Xiaolin,WEI Gengzhong,LIU Siqi,et al. Free vibration and dynamic response of functionally graded graphene-reinforced rectangular plates on viscoelastic foundations[J]. Chinese journal of applied mechanics,2021,38(3):1202-1208(in Chinese).

[21] WATTANASAKULPONG N, CHAIKITTIRATANA A. Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on Timoshenko beam theory: chebyshev collocation method [J]. Meccanica,2015,50(5):1331-1342.

[22] ZHOU K, HUANG X C, TIAN J J, et al. Vibration and flutter analysis of supersonic porous functionally graded material plates with temperature gradient and resting on elastic foundation[J]. Composite structures,2018,204:63-79.

[23] FANG X Q, ZHU C S. Size-dependent nonlinear vibration of nonhomogeneous shell embedded with a piezoelectric layer based on surface/interface theory[J]. Composite structures, 2017, 160: 1191-1197.

[24] TIAN W, ZHAO T, YANG Z C. Nonlinear electro-thermo-mechanical dynamic behaviors of a supersonic functionally graded piezoelectric plate with general boundary conditions[J]. Composite structures,2021,261:113326.

[25] REDDY J N. A simple higher-order theory for laminated composite plates[J]. Journal of applied mechanics,1984,51(4):745-752.

[26] SHENG G G, WANG X. Thermoelastic vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical shells[J]. Applied mathematical modelling,2010,34(9):2630-2643.

[27] MEHRALIAN F, BENI Y T. Vibration analysis of size-dependent bimorph functionally graded piezoelectric cylindrical shell based on nonlocal strain gradient theory[J]. Journal of the brazilian society of mechanical sciences and engineering,2018,40(1):27.

[28] WANG Y W, XIE K, FU T R, et al. A unified modified couple stress model for size-dependent free vibrations of FG cylindrical microshells based on high-order shear deformation theory[J]. The european physical journal plus,2020,135(1):71.

(编辑　张璐)